Bio 6077

Exercices, chapitre 2

Calcul matriciel

Septembre 2010

Vérifiez vos réponses numériques à l'aide de R

1. Montrer que

(a) $$\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 2 & -1 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 17 \\ -11 & 2 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -13 & -4 \\ 2 & 12 \end{bmatrix}$$

(b) $$4\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

(c) $$\begin{bmatrix} 3 & 8 & 4 \\ 8 & 7 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \text{ est symétrique}$$

2. Comparer les produits **AX** et **BX** de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 7 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

3. Calculer le produit des deux matrices suivantes:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$$

4. Calculer le carré, $\mathbf{A}^2$, de

$$\mathbf{A} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Calculer le carré, $\mathbf{B}^2$, de

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 9 & -6 \end{bmatrix}$$

6. Par quelle <u>matrice</u> **A**, contenant seulement les éléments a, b, c et 0, faut-il pré-multiplier le vecteur $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ pour trouver

(a) $$\begin{bmatrix} ax \\ by \\ cz \end{bmatrix}$$

(b) $$\begin{bmatrix} ay \\ bz \\ cx \end{bmatrix}$$

(c) $$\begin{bmatrix} az \\ bx \\ cy \end{bmatrix}$$

Vérifiez vos réponses!

7. Comparer la pré-multiplication et la post-multiplication de $[u\ v\ w]$ par $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

8. Calculer les carrés ainsi que tous les produits possibles des matrices suivantes prises deux à deux (il faut trouver 9 réponses en tout):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & j \\ -j & 0 \end{bmatrix} \text{ où } j = \sqrt{-1}, \quad \text{et } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

La matrice B contient le nombre imaginaire $j = \sqrt{-1}$. Cet exercice vous préparera aux vecteurs propres imaginaires que nous rencontrerons à la section 9.2 du manuel.

9. Si **A**, **B** et **C** sont comme dans le problème précédent et a, b et c sont des scalaires (nombres), calculer le carré $\mathbf{X}^2$ de $\mathbf{X} = a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C}$

10. À l'aide des matrices **A** et **B** ci-dessous, qui ne diffèrent que par l'ordre de leurs lignes, montrer que, si on échange deux lignes d'une matrice carrée, le déterminant change de signe.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Vous pouvez faire une preuve algébrique ou utiliser un exemple pour illlustrer la propriété.

11. Quel est le déterminant

(a) d'une matrice diagonale?

(b) d'une matrice triangulaire?

Illustrer ces propriétés à l'aide d'une matrice 3×3.

12. Inverser la matrice **A** ci-dessous par la méthode pivotale de Gauss-Jordan. Vérifier le résultat par la pré-multiplication et la post-multiplication de **A** par $\mathbf{A}^{-1}$ (utilisez R).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

13. Au moyen du calcul matriciel, résoudre le système d'équations:

$$x + 2y + 3z = -1$$

$$2x + 3y + z = 2$$

$$3x + y + 2z = -3$$

14. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice suivante:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Normaliser les vecteurs propres.

Tracer un graphique des vecteurs propres par rapport au système de référence du départ. Les vecteurs propres sont-ils orthogonaux? Pouviez-vous le savoir avant de réaliser le calcul?

15. À l'aide des valeurs calculées au no 14, évaluer $\mathbf{B}^2$ et $\mathbf{B}^{-3}$. Voir comment calculer les exposants d'une matrice: chapitre 2, équation 2.29. Utilisez R pour réaliser les calculs.

16. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice suivante:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & -4 \\ -6 & 4 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

La méthode la plus simple pour calculer les λ_i à partir du polynôme caractéristique est la méthode graphique (ex. Figure 2.2 du manuel).

Formez la matrice $\mathbf{U}$ contenant les vecteurs propres normalisés et calculez $\mathbf{Z} = \mathbf{U}'\mathbf{A}\mathbf{U}$. Que retrouvez-vous dans la matrice $\mathbf{Z}$? Utilisez R pour le calcul.
