

## Régression multiple: calcul des paramètres par inversion matricielle

Tableau de données :

| <b>y</b>       | <b>x<sub>1</sub></b> | <b>x<sub>2</sub></b> | ----- | <b>x<sub>m</sub></b> |
|----------------|----------------------|----------------------|-------|----------------------|
| y <sub>1</sub> | x <sub>11</sub>      | x <sub>12</sub>      | ----- | x <sub>1m</sub>      |
| y <sub>2</sub> | x <sub>21</sub>      | x <sub>23</sub>      | ----- | x <sub>2m</sub>      |
| -----          | -----                | -----                | ----- | -----                |
| -----          | -----                | -----                | ----- | -----                |
| -----          | -----                | -----                | ----- | -----                |
| -----          | -----                | -----                | ----- | -----                |
| y <sub>n</sub> | x <sub>n1</sub>      | x <sub>n4</sub>      | ----- | x <sub>nm</sub>      |

Notation matricielle de l'équation de régression :  $\mathbf{y} = \mathbf{X} \mathbf{b}$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nm} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

L'ajout d'une colonne de "1" à la matrice  $\mathbf{X}$  permettra d'estimer l'ordonnée à l'origine.

Raisonnement (*Numerical ecology* 2012, p. 88) :

$$\mathbf{y} = \mathbf{X} \mathbf{b}$$

$$\mathbf{X}'\mathbf{y} = \mathbf{X}'\mathbf{X} \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad [\mathbf{X}'\mathbf{X}]^{-1}[\mathbf{X}'\mathbf{y}] = [\mathbf{X}'\mathbf{X}]^{-1} [\mathbf{X}'\mathbf{X}] \mathbf{b}$$

$$\Rightarrow \quad [\mathbf{X}'\mathbf{X}]^{-1}[\mathbf{X}'\mathbf{y}] = \mathbf{b}$$

Calcul des valeurs estimées par l'équation de régression :

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X} \mathbf{b}$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X} [\mathbf{X}'\mathbf{X}]^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{y}$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X} [\mathbf{X}'\mathbf{X}]^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{y}$$

**Projecteur**

Au cours du test par permutation, on n'aura pas à recalculer le projecteur.  
On calculera simplement :

$$\hat{\mathbf{y}}_{\text{permuté}} = \mathbf{X} [\mathbf{X}'\mathbf{X}]^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{y}_{\text{permuté}}$$

$$\hat{\mathbf{y}}_{\text{permuté}} = \mathbf{Projecteur} \mathbf{y}_{\text{permuté}}$$